数理解析研究所講究録
868巻 1994年 136-148

GL_p-bundleの非可換幾何

信州大学理学部　浅田明 (Akira Asada)

次の微分幾何の問題は，可積分系と関係が深い．

(i)　(行列値)1-形式 θ が $g^{-1}dg$ と書ける条件を求めよ．

(ii)　(行列値)2-形式 Θ が $d\theta+\theta\wedge\theta$ と書ける条件を求めよ．

H を polarization ε を持つ Hilbert 空間，I_p を H の線形作用素の作る p-Schatten ideal とする時，(i), (ii)の非可換版は

(i)′　I_p の値を取る K が $g^{-1}[\varepsilon, g]$ と書ける条件を求めよ．

(ii)′　I_p の値を取る R が $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と書ける条件を求めよ．

となる．(i), (ii)の(局所)解を非 Abel Poincaré 補題と呼んでいるので([2], [1]参照)，(i)′, (ii)′ の解は非可換 Poincaré 補題と呼ぶ事にする．

以下では非可換Poincaré補題を中心に，GL_p-bundleの非可換幾何的取扱いについて話す．これは前回の研究会での話([3])の続きだが，前回話した非可換特性類は，GL_p-bundleは U_1-bundleに同値な事が証明出来たので必要なくなった．これについて

も報告する.

1. 群 GL_p, 環 gl_p と非可換形式

$\mathcal{H}$ を polarization $\varepsilon = P_+ - P_-$ を持つ Hilbert 空間, $B(\mathcal{H})$, $GL(\mathcal{H})$, $U(\mathcal{H})$ を, それぞれ $\mathcal{H}$ の有界線形作用素の作る環, 逆を持つ有界線形作用素の作る群, Unitary 作用素の作る群とする. $\mathcal{H}$ の compact 作用素の全体 I_c は $B(\mathcal{H})$ の唯一つの極大 ideal だが

$$I_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid \sum |(Te_n, e_n)|^p < \infty, \text{ある O.N-basis } \{e_n\} \text{について}\}$$

も ideal で p-Schatten ideal と呼ばれる. 定義から $p > q$ なら $I_p \subset I_q$ だが, 更に

(1) $$I_p{}^2 = I_{p/2}$$

である. ε と I_p を用いて

$$gl_p = \{T \in B(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$
$$GL_p = \{T \in GL(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] \in I_p\},$$
$$U_p = GL_p \cap U(\mathcal{H})$$

とおく. $T \in GL_p$ の時 $|T| \in GL_p$ となるから, GL_p を構造群とする paracompact 空間上の fibre bundle (GL_p-bundle) は U_p を構造群とする bundle と同値である.

$P_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $P_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$ とすれば, 直和分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ により, $T \in B(\mathcal{H})$ は $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と (2,2)-行列の形に書ける.

$T^d = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $T^0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ とした時

$$\varepsilon T = T\varepsilon \Longleftrightarrow T = T^d, \quad \varepsilon T = -T\varepsilon \Longleftrightarrow T = T^0$$

となる.

(2) $\qquad \delta_+ T = \{\varepsilon, T\} = \varepsilon T + T\varepsilon, \qquad \delta_- T = [\varepsilon, T] = \varepsilon T - T\varepsilon$

と書く事にする. $\delta_+\delta_- = \delta_-\delta_+ = 0$ である.

定義 $T_{i_0\cdots i_k}, T_{i_0}, \cdots, T_{i_k} \in gl_p$ の時

$$\sum T_{i_0\cdots i_k}\delta_- T_{i_0}\cdots\delta_- T_{i_k}$$

の形の元を非可換 k-形式(非可換 k 次微分形式)と呼ぶ.

定義から非可換 k-形式 $\in I_p^k$, 特に非可換 2-形式 $\in I_{1/2}$ である

補題 1. δ_-(2k-非可換形式) = (2k+1)-非可換形式,

δ_+((2k+1)-非可換形式) = (2k+2)-非可換形式.

注意 より精密に, 次が成立する.

$$\{\text{非可換 } 2k\text{-形式}\}/I_p^{2k+1} = (I_p^{2k}/I_p^{2k+1})^d$$

$$\{\text{非可換 } (2k-1)\text{-形式}\}/I_p^{2k} = (I_p^{2k-1}/I_p^{2k})^0.$$

2. 非可換接続と非可換曲率

$\xi = \{g_{uv}\}$ を多様体 M 上の GL_p-bundle とする.

定義 I_p の値を取る(連続, 又は可微分)関数の集まり $\{K_u\}$ が

(3) $\qquad (\varepsilon + K_u) g_{uv} = g_{uv}(\varepsilon + K_v)$

を満す時, ξ の非可換接続, 又 $\{R(K_u)\} = \{R_u\}$

(4) $$R(K_u) = \varepsilon K_u + K_u + K_u^2$$

を, $\{K_u\}$ の(非可換)曲率と言う.

$\{U\}$ に関する (C^∞-級) 1 の分割を $\{e_u\}$ とした時

$$K_u = \sum e_w g_{uw}^{-1}[\varepsilon, g_{uw}]$$

とおけば (3) をみたすから

補題 2　M が paracompact な Hilbert 多様体の時, M 上の GL_p-bundle は非可換1-形式に値を取る非可換接続を持つ. 特に ξ が U_p-bundle であれば, Hermite 作用素の値を取る非可換1形式の非可換接続を持つ.

系　同じ仮定で, ξ は $I_{p/2}$ に値を取る非可換曲率を持つ.

尚非可換接続, 非可換曲率の形式的性質は通常の接続, 曲率(gl_p に値を取る1-形式と2-形式)と同じである([3]).

3. 非可換 Poincaré 補題, I. 局所問題.

最初に, 比較の爲非Abel Poincaré補題に関する結果をまとめておく([2]).

行列値微分形式 $\phi = \sum \phi_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ に対し

$$I\phi = \sum I(\phi)_{i_1 \cdots i_{p-1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

$$I(\phi)_{i_1 \cdots i_{p-1}} = \int_0^1 t^p \sum_{j=1}^m x_j \phi_{j i_1 \cdots i_{p-1}}(xt)\, dt$$

$$I_\theta(\phi) = I(\theta\wedge\phi), \quad P_\theta(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} I_\theta^{n}(\phi)$$

とおく．但しθは行列値1-形式である．この時

$$dP_\theta(\phi) = \theta\wedge P_\theta(\phi) + P_\theta(d\phi - I((d\theta+\theta\wedge\theta)\wedge P_\theta(\phi)))$$

が成立する．特に$d\theta+\theta\wedge\theta=0$が$\theta = g^{-1}dg$と（局所的に）書ける為の必要十分条件で$g$は$P_\theta(1)$（1は単位行列）で与えられる（[1]参照）．これが1-次元非Abel Poincaré補題である．

2-次元非Abel Poincaré補題（曲率形式の候補者を与えて接続形式を求める問題）は次の様に述べられる．

1-形式ϕとp-形式βに対し

$$J_\phi(\beta) = (-1)^{p-1} P_\phi(1)^{-1} P_{(-1)^p\phi}(I(P_\phi(1)\beta))$$

とおく．1-形式βと2-形式αに対し

$$T\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} - J_\beta\left(D\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right), \quad D\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\alpha+[\beta,\alpha]\\ \alpha-(d\beta+\beta\wedge\beta)\end{pmatrix} \quad J_\phi\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}J_\phi(\alpha)\\ J_\phi(\beta)\end{pmatrix}$$

とおいた時，すべてのnについて

$$T^n\begin{pmatrix}\Theta\\ \theta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Theta\\ \theta_n\end{pmatrix}$$

がなりたてば，$\lim \theta_n = \theta$が存在して$d\theta+\theta\wedge\theta = \Theta$となり，逆も正しい．

非可換Poincaré補題は，Hermite作用素の値を取る，I_p-値関数KとRに対してだけ得られているので，以下その事を仮定

する．

定理1．(i) Kが(非可換)平坦，$\varepsilon K+K\varepsilon+K^2=0$，となる為の必要十分な条件は$\mathcal{U}_p$の値を取る関数$g$が存在して

(5) $$K=g^{-1}[\varepsilon,g]$$

と(局所的に)書ける事である．

(ii) $R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$，$K$は$I_p$の値を取る関数，と書ける為の必要十分条件は次の(a)，(b)である．

(a) $I+R$はpositive作用素になる．

(b) $[\varepsilon,R]\in I_p^2$

Kが平坦なら$(\varepsilon+K)^2=I$となり，$K(x)\in I_p$から$\varepsilon+K(x)$はεと同じspectre型を持つ．従って(i)は次の補題3に帰着する．

補題3．ε_uが$\mathcal{H}$のpolarizationの値を取る関数なら，局所的にε_uと同じregularityを持つ，unitary作用素の値を取る関数h_uがあって$\varepsilon_u=h_u^{-1}\varepsilon h_u$と書ける．更に$\varepsilon+\varepsilon_u$がmod. I_pで逆を持てば，h_uは$\mathcal{U}_p$に値を取る．但し$\varepsilon_u\in gl_p$とする．

証明(藤井一幸氏による)．$\varepsilon_u(x)$とεのspectre型が等しいから，$\varepsilon_u(x_0)=\varepsilon$と仮定して良い．$\eta=\frac{1}{2}(1+\varepsilon\varepsilon_u)$とおくと$\eta(x_0)=1$，$\varepsilon\eta=\eta\varepsilon_u$だから，$\eta$が逆を持つ範囲で$\varepsilon_u=\eta^{-1}\varepsilon\eta$である．又$\eta^*\varepsilon=\varepsilon_u\eta^*$だから

$$\eta\eta^*\varepsilon=\eta\varepsilon_u\eta^*=\varepsilon\eta\eta^*$$

である．従って $(\eta\eta^*)^{1/2}$ も ε と交換し

$$h = (\eta\eta^*)^{-1/2}\eta$$

は unitary, $h^{-1}\varepsilon h = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1/2}\varepsilon(\eta\eta^*)^{-1/2}\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\varepsilon\eta = \eta^*(\eta\eta^*)^{-1}\eta\,\varepsilon_u = \varepsilon_u$

となって前半が得られる．後半は $\varepsilon_u = h^{-1}\varepsilon h$ の時

$$[\varepsilon, \varepsilon_u] = \varepsilon h^{-1}\varepsilon h - h^{-1}\varepsilon h\varepsilon = \varepsilon h^{-1}(\varepsilon h - h\varepsilon) + h^{-1}\varepsilon(\varepsilon h - h\varepsilon)$$

$$= (\varepsilon + h^{-1}\varepsilon h)h^{-1}(\varepsilon h - h\varepsilon) = (\varepsilon + \varepsilon_u)h^{-1}[\varepsilon, h]$$

から解る．

$R = \varepsilon K + K\varepsilon + K^2$ なら $I+R = (\varepsilon+K)^2$ だから $I+R$ は positive である．逆に $I+R$ が positive の時 $I+R = \sum \lambda_i P_i$ と spectre 分解出来 $\lambda_i \geqq 0$ である．簡単の為符号の不定性を残したまゝ

$$(I+R)^{1/2} = \sum \pm\sqrt{\lambda_i}\,P_i$$

と書く．$K = (I+R)^{1/2} - \varepsilon$ と置けば $R = \varepsilon K + K\varepsilon + K^2$ だから，$K \in I_p$ となる様 $I+R$ の固有値の平方根の符号をきめる事が問題である．(b) から $I+R$ の固有値は有限個を除いて，$I+R^d$ の固有値の摂動として求められ，$I+R^d$ の固有値の平方根の符号は，$I+R^d$ と ε が同時対角化されるから，ε から定められる．この時 $\sum|\lambda_i - 1|^p < \infty$ から $\sum|\sqrt{\lambda_i} - 1|^p < \infty$ となる事により，$K \in I_p$ が得られる．尚この議論から $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2 = \varepsilon K' + K'\varepsilon + K'^2$ なら

(6) $\quad K' = eK,\quad e = I - 2P,\quad P$ は有限次元空間への射影

となる．

4. 非可換曲率の性質

[3]で述べた様に，$\{K_u\}$, $\{R_u\} = \{R(K_u)\}$ を U_p-bundle ξ の Hermite 非可換接続，及び曲率とする時，次の(a), (b)が成立する．

(a). $I + R_u(x)$ が至る所逆を持たなければ，ξ は trivial である．

(b) $R_u(x)$ が I_q の値を取れば，ξ は U_q-bundle と同値である（$p > q$ とする）．

(a)は補題3と $\mathcal{H}$ の unitary 作用素の群が可縮という Kuiper の定理から導かれる．(b)は摂動論の Rellich-Kato の定理から，任意の x の近傍で $\mathcal{H}$ の射影の値を取る連続（又は可微分）関数 P_r で

$$P_r\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varepsilon + K_u(x)) \oplus \{\varepsilon + K_u(x) \text{ の} + \text{固有空間}\}$$

となるものの存在が言え，この事と補題3から得られる．

(b)と補題2系から次の定理が得られる

定理2. Paracompact 多様体（又は C^∞-smooth 多様体）上の GL_p-bundle は位相的 bundle（又は可微分 bundle）として，U_1-bundle と同値である．特に非可換接続，非可換曲率としては，trace を持つものを取れる．

5 非可換 Poincaré 補題 II，大域問題

M は paracompact，位相的 bundle の時，C^∞-smooth (C^∞-級の 1 の分割を持つ，paracompact な Hilbert 多様体なら充分)，可微分 bundle の時，とし K，R を M 上連続，又は微分可能な Hermite 且 I_p の値を取る関数とする．ことわらないが，以下表われる関数は K，R と同じ regularity を持つとする．

定理 3．K が M 上で $\varepsilon K + K\varepsilon + K^2 = 0$ をみたせば

$$K = g^{-1}[\varepsilon, g],$$

となる M から U_p への関数 g が存在する．

証明 Local には $K = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$ と書ける．

$$(fg)^{-1}[\varepsilon, fg] = g^{-1}\{f^{-1}[\varepsilon, f)\}g + g^{-1}[\varepsilon, g]$$

から $C_{uv} = g_u g_v^{-1}$ とおくと，$\{C_{uv}\}$ は M 上の $U(\mathcal{H}_+)\times U(\mathcal{H}_-)$-bundle を定める．従って Kuiper の定理から $C_{uv} = h_u^{-1}h_v$，$h_u : U \to U(\mathcal{H}_+)\times U(\mathcal{H}_-)$ と書け，$h_u g_u = h_v g_v$，$(h_u g_u)^{-1}[\varepsilon, h_u g_u] = g_u^{-1}[\varepsilon, g_u]$ だから定理が得られる．

R が定理 1，(ii) の (a)，(b) をみたせば，局所的に

$$R = \varepsilon K_u + K_u\varepsilon + K_u^2, \quad K_u = (I+R)^{1/2}_u - \varepsilon,$$

と書け，$(I+R)^{1/2}{}_u = e_{uv}(I+R)^{1/2}{}_v$ とおけば

$e_{uv} = I - 2P_{uv}$，$P_{uv}(x)$ は有限次元空間への射影

となる．$I+R$ が M 上 open dense な集合で，単純固有値しか持たなければ $\{e_{uv}\}$ は(能が)可換になるが，M 上の Hermite 且 I_p の値を取る関数 S を取って $I+R+\tau S$ が $\tau>0$ で定理1，(ii) の (a), (b) をみたし，M の open dense な点で，単純固有値しか持たない様出来るから，$\{e_{uv}\}$ は可換と仮定して良い．この時 $e_{uv}(x)$ は Z_2^∞ (Z_2 の無限直和) の元と思えるから，$\{e_{uv}\}$ は Z_2^∞-係数の M 上の Čech 1-cocycle を定める．そうすれば標準的な議論で次の定理が得られる．

定理4．$\{e_{uv}\}$ の定める $H^1(M, Z_2^\infty)$ の元は R だけで定まる．この元を $o(R)$ と書くと $o(R)=0$ が $R=\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と M 上で書ける為の必要十分条件である．特に $H^1(M, Z_2)=\{0\}$ であれば，R は常に M 上で $\varepsilon K+K\varepsilon+K^2$ と書ける．

6．非可換 Poincaré 補題と U_p-bundle の不変量

$\xi=\{g_{uv}\}$ を M 上の U_p-bundle とし，$\{R_u : U\to I_p$, 且 Hermite$\}$ は，各 $R_u(x)$ が定理1，(ii) の (a), (b) をみたし

(7) $$g_{uv}^{-1}R_u g_{uv}=R_v$$

となるものとする（U 上の関数として連続又は可微分）．

もし $(I+R_u)^{1/2}$ を，$(I+R_u)^{1/2}-\varepsilon\in I_p$，且

(8) $$g_{uv}^{-1}(I+R_u)^{1/2}g_{uv}=(I+R_v)^{1/2}$$

となる様取れれば，$K_u=(I+R_u)^{1/2}-\varepsilon$ は

(9) $$g_{uv}^{-1}K_u g_{uv} + g_{uv}^{-1}[\varepsilon, g_{uv}] = K_v$$

をみたすから，ξの非可換接続になる．

実数tが$0\leqq t\leqq 1$の時$\{tR_u\}$も$\{R_u\}$と同じ性質を持つ．もし$(I+tR_u)^{1/2}$を

$$(I+tR_u)^{1/2}-\varepsilon\in I_p,\quad g_{uv}^{-1}(I+tR_u)^{1/2}g_{uv}=(I+tR_v)^{1/2}$$

となる様取れれば，

$$K_{u,t}=(I+tR_u)^{1/2}-\varepsilon,$$

とおいて，$\{K_{u,t}\}$はξの非可換接続であり，$\lim_{t\to 0}K_{u,t}$は平坦になるからξはtrivialになる．$I+tR_u(x)$のspectre分解は

$$I+tR_u(x)=\sum(1+t\lambda_i(x))P_i,\qquad I+R_u(x)=\sum(1+\lambda_i(x))P_i,$$

だから，もし$1+\lambda_i(x)\neq 0$なら，$(1+t\lambda_i(x))^{1/2}$の符号は$(1+\lambda_i(x))^{1/2}$の符号から定められる．特に$\{R_u\}$がξの非可換曲率で$I+R_u(x)$が常に逆を持てば，ξがtrivialになる事がこの事から解る．

$1+\lambda_i\geqq 0$なら$1+t\lambda_i\gneqq 0$，$0\leqq t<1$，だから，$I+R_u(x)$が0-modeを持っても$I+tR_u(x)$，$t<1$，は0-modeを持たない．この場合，$(I+tR_u)^{1/2}-\varepsilon\in I_p$となる$(I+tR_u)^{1/2}$は，$R_u$が非可換曲率であっても，その非可換接続からは定められない．しかし

(10) $$(I+tR_u)^{1/2}=e_{uv}g_{uv}(I+tR_v)^{1/2}g_{uv}$$

$$e_{uv}=I-2P_{uv},$$ P_{uv}は有限次元空間への射影

は成立し，e_{uv}はtに無関係に取れる．又$(I+tR_u)^{1/2}_a$も

$(I+tR_u)^{1/2}_a-\varepsilon\in I_p$をみたせば

(11) $$(I+tR_u)^{1/2}_a = \varepsilon_u (I+tR_u)^{1/2}$$

$\varepsilon_u = I-2P_u$, P_uは有限次元空間への射影

となる．

(10), (11) から次の cocycle 関係と同値関係が導かれる．

(12) $$e_{uv}g_{uv}\cdot e_{vw}g_{vw}\cdot e_{wu}g_{wu} = 1,$$

(13) $$\{e_{uv}\} \sim \{\varepsilon_u^{-1} e_{uv}\, g_{uv}\,\varepsilon_v\, g_{uv}^{-1}\}.$$

ここで，$\{e_{uv}\}$, $\{\varepsilon_u\}$ の交換関係は

(14) $$e_{uv}e_{uw} = e_{uw}e_{uv},\quad e_{uv}g_{wu}e_{wx}g_{wu} = g_{wu}e_{wx}g_{wu}e_{uv}$$

(15) $$\varepsilon_u e_{uv} = e_{uv}\varepsilon_u,\quad \varepsilon_u g_{uv}\varepsilon_v g_{vu} = g_{uv}\varepsilon_v g_{vu}\varepsilon_u$$

である．尚 $\{g_{uv}\}$ を $\{h_u^{-1}g_{uv}h_v\}$ に取りかえると

$$\{e_{uv}\} \to \{h_u^{-1}e_{uv}h_u\},\quad \{\varepsilon_u\} \to \{h_u^{-1}\varepsilon_u h_u\}$$

と変る．

上記を定式化する為，Z_2^∞ を（定理4と同じ議論をして），R_u と可換な有限次元射影を用いて表現すれば $g_{uv}^{-1}Z_2^\infty g_{uv}$ は R_v と可換な有限次元射影による Z_2^∞ の表現である事を注意する．この事から ξ によって twist された Z_2^∞ の層 $Z_2^\infty(\xi)$ が出来，$H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$ が ξ だけで定まる．(12), (13) から $\{e_{uv}\}$ から $H^1(M, Z_2^\infty(\xi))$ の元 $o(R)$ が定まる．尚交換関係 (15) から，ξ が non-trivial の時，$B^1(\mathfrak{U}, Z_2^\infty(\xi))$ はかなり小さくなる．

Z_2^∞ は discrete だから R が parameter s に連続的に依存している時 $o(R)$ は不変である．特に $\{R_u\}$ として ξ の非可換曲率を取

れば，非可換曲率全体の集合は弧状連結だから $o(\{R_{ij}\})$ は ξ だけで定まる．従って次の定理が得られる．

定理5．$\{R_{ij}\}$ を ξ の非可換曲率とすれば $o(\{R_{ij}\}) \in H^1(M, Z_2^{\infty}(\xi))$ は ξ だけで定まる．この元を $o(\xi)$ とすれば $o(\xi) = 0$ となる必要十分な条件は ξ がtrivialな事である．

$o(\xi)$ からより計算しやすい不変量を導く事は今後の問題である．尚この研究の主な部分は昨年（93年）Bologna滞在中出来た．滞在の機会を与えて頂いたVaz Ferreira教授とCNR，及び種々討論したAlmeida教授に感謝します．

文献（尚[3]の引用文献参照）

[1] Almeida, P.: A direct approach to one variable noncommutative calculus, Port. Math. 46 (1989)

———: Calcul explicite de l'holonomie（上記の resumé, 3p）.

[2] Asada, A.: Non Abelian Poincaré Lemma, Lect. Notes Math. 1209 (1986), 37-65

[3] Asada, A.: 非可換接続と超対称性，数理研講究録 822 (1993), 70-83

———: Non-commutative geometry of Glp-bundles, preprint 42p).

尚非可換幾何の標準modelへの応用について最近次の論文が発表された．

Kastler, D.: A detailed account of Alain Connes' version of the standard model in non-commutative geometry, I, II, Rev. Math. Phys. 5 (1993), 477-532, Várilly, J.C.-Gracia-Bondía, J.M.: Connes' noncommutative differential geometry and the standard model, J. Geo. Phys. 12 (1993) 223-301.